INVESTIGACIÓN

Revista Mexicana de Investigación Educativa
enero-junio 1996, vol 1, núm 1, pp. 107-122

Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual

*Guillermina Waldegg**

Resumen:
El establecimiento de una biyección entre un conjunto infinito y una de sus partes propias es el obstáculo más difícil de superar para la comprensión de los conjuntos infinitos. Una vez identificado como obstáculo epistemológico en el desarrollo histórico, se planteó la conveniencia de determinar su naturaleza en el dominio didáctico. Para medir la coherencia de los respuestas de los estudiantes ante situaciones vinculadas a los conjuntos infinitos, se planteó la necesidad de realizar un estudio basado en las concepciones de los estudiantes. En este trabajo damos cuenta de los resultados obtenidos a partir de los respuestas de los estudiantes; en ellas se puede apreciar que existe la resistencia a la instrucción, característica de los obstáculo didácticos. Se mostró también que, en todo caso, es el contexto de la pregunta, y no la enseñanza, lo que determina el comportamiento de los alumnos.

Abstract:
The establishment of one-to-one mappings between an infinite set and one proper subset is the hardest obstacle to overcome in the understanding of infinite sets. The fact that the difficulty was recognized as an epistemological obstacle in the historical development, brought forth the need to determine its nature within the didactic field. A study based on the sudents' conceptions was, therefore, made in order to measure the consistency of students' response to working in contexts involving infinite sets. This article presents the results obtained from the student's answers, which manifest a reluctance to instruction, characteristic of didactic obstacles. It also claims that it is the context of the question, rather than the teaching, which determines the students' reaction.

Introducción

El infinito tiene un papel esencial e incuestionable en la matemática actual. Para el matemático de hoy en día, el infinito es sólo *un objeto más* de la matemática: bien definido, contenido en una estructura axiomático-deductiva, cuyas operaciones y relaciones con otros objetos están perfectamente determinadas. Sin embargo, si el matemático puede trabajar hoy con el infinito de manera tan natural, es gracias a que al "matematizarlo", ha renunciado al debate milenario sobre las múltiples significaciones, contradicciones y paradojas que han estado asociadas al infinito en la ciencia, la filosofía, la cosmogonía y la teología. Los problemas, no obstante, no han desaparecido en el decurso de la re-construcción conceptual durante un proceso de aprendizaje.

Nuestra visión actual del infinito en la matemática distingue dos acepciones: la primera está asociada a la ausencia de límites o de fronteras, a la falta de conclusión o de término de un proceso que se repite o que progresa indefinidamente. Bajo esta significación, el infinito es, literalmente, *lo que no tiene fin*, lo que **siempre** (infinito temporal) se puede continuar. A este tipo de infinito lo llamamos *infinito potencial*, es el único infinito aceptado por Aristóteles y es el único infinito admitido en la ciencia hasta el siglo XIX. Un ejemplo claro de infinito potencial es la **serie** de

* Investigador Titular de la Sección de Metodología y Teoría de la Ciencia, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. Correo electrónico: gwaldega@mailer.main.conacyt.mx

los números naturales (los números "para contar"), en donde siempre es posible hallar el sucesor de un número dado, no importa qué tan grande sea este número, aunque siempre el número y el sucesor son **finitos**.

En la segunda connotación, el infinito está asociado a la idea de totalidad, de completez y de unidad. Un proceso (potencialmente infinito en sus orígenes) se considera ahora *acabado* y los límites, *alcanzados*. Esta es la forma en la que el matemático piensa hoy en el *conjunto de **todos** los números*, sin que tenga la necesidad de nombrar o pensar cada uno de ellos, individualmente. Este infinito se llama *infinito actual* y ha jugado un papel capital en el desarrollo de la matemática moderna, a partir de la teoría de conjuntos creada por Georg Cantor a finales el siglo XIX.

El infinito potencial bajo manifestaciones diversas aparece muy temprano, tanto en la evolución histórica de las ideas, como en el desarrollo intelectual del individuo. Además del infinito asociado al conteo –producto de una extrapolación de la experiencia sensible con colecciones finitas de objetos– los niños desde pequeños son capaces de advertir que las reglas de las operaciones elementales son aplicables y válidas para "*todos los números*"; o que hay eventos cíclicos –como la sucesión del día y la noche– que se repiten *indefinidamente* sin que parezcan tener fin. Más tarde, a partir de las operaciones prácticas de medir, se llega a la idea de *aproximación teórica*[1] que a su vez, prepara el camino para alcanzar la noción de *variación continua*.[2] Este infinito aparece muy pronto en el decurso del desarrollo conceptual sin que se manifiesten conflictos graves con la intuición, y permanece largo tiempo sin evolucionar. No hay experiencias escolares elementales que favorezcan un cambio a una nueva conceptualización. No hay tampoco –aparentemente– necesidades que las demanden.

El desarrollo conceptual del *infinito actual* es bastante diferente: se manifiesta muy tardíamente y aparece siempre inmerso en situaciones conflictivas. No obstante se puede pensar en una especie de anterioridad lógica (quizás ontológica[3]) del infinito actual sobre el potencial, lo que tiene como consecuencia que su aparición sea inevitable en los procesos de creación y re-creación de las matemáticas en donde está presente el infinito potencial. Pese a ello, no existe en los programas escolares –desde la escuela elemental hasta el fin de los estudios secundarios– ningún capítulo dedicado al tratamiento del infinito que prepare la unificación de ideas y operaciones, y la confrontación de aspectos intuitivos y formales. Continuamente se evitan situaciones que consideren como actual lo no-acabado o como terminada una operación que progresa al infinito. No existe, en suma, una preparación cognitiva para interiorizar el infinito actual.

Circunstancias escolares mediocres e intuiciones equívocas, contribuyen a que la cuestión del infinito sea uno de los obstáculos más difíciles de superar en la enseñanza de las matemáticas; esta situación hace crisis en el momento de iniciar el aprendizaje del cálculo.

El sondeo inicial

Los conflictos cognitivos vinculados al infinito han sido señalados en varios estudios anteriores, muy notablemente por Duval (1983) y Fishbein (1979) y los constatamos en un sondeo inicial. Como primera aproximación al problema, se propusieron, a tres grupos diferentes de sujetos (estudiantes y maestros cuyas edades fluctuaban entre 15 y 31 años), algunas preguntas relativas a situaciones vinculadas al infinito; por ejemplo, la subdivisión infinita de un segmento, los desarrollos decimales infinitos, la continuidad aritmética y las relaciones entre los elementos de dos conjuntos infinitos.

Aunque el propósito del presente reporte no sea la descripción detallada de este primer estudio, es importante resaltar algunos resultados que serían relevantes para los estudios posteriores. De entrada, las respuestas obtenidas fueron clasificadas en "finitistas" e "infinitistas". Las *respuestas finitistas*, correspondían a argumentos que negaban toda posibilidad de continuar una operación indefinidamente, o que sólo aceptaban consideraciones sobre conjuntos finitos. De un total de 400 respuestas efectivas, se encontraron 273 (63%) de tipo finitista. Resalta el hecho de que más de la mitad de los sujetos de la muestra no acepten el infinito dentro de sus argumentaciones y que esta situación no cambie con la edad.

Del análisis cualitativo de los razonamientos de los sujetos de la muestra, se hizo evidente que los argumentos "infinitistas" se refieren principalmente a un infinito potencial, en el que predomina la idea de un **proceso** que se puede repetir o continuar indefinidamente. Sin embargo, hay que agregar que estos argumentos "infinitistas" son utilizados de manera ambivalente, tanto para afirmar como para negar una misma proposición; por ejemplo, ante la pregunta *"Un punto arbitrario sobre un segmento, ¿puede ser alcanzado por una serie indefinida de biparticiones?"*, se encuentran respuestas afirmativas y negativas que usan el mismo argumento: "*porque la operación es infinita*". Hay también inconsistencias en los argumentos infinitistas; por ejemplo, hay sujetos que dicen que un segmento no puede agotarse por procesos de biparticiones o triparticiones y, sin embargo, afirman que el proceso **termina** más rápidamente en el caso de las triparticiones.

Desde un punto de vista más técnico, relacionado con la concepción de los objetos matemáticos, se encontró que no hay ninguna diferencia entre la "recta real" y la "recta racional" (distinción esencial para el matemático, ya que entraña la idea de infinitos diferentes). Esto significa que para los estudiantes todos los puntos de la recta están asociados a números racionales (expansiones decimales finitas o periódicas), y que los números irracionales (como p o *e*) no tienen una realidad dentro de su universo numérico. No se manifiesta tampoco la identificación punto-número en la recta que muchas veces se ha tomado como "intuitiva" o "evidente". Finalmente, en lo que se refiere a los conjuntos infinitos, los estudiantes no reconocen la actualidad de un proceso infinito y, cuando lo hacen, el establecimiento de la biyección (correspondencia uno-a-uno) no es aceptado como un criterio válido para comparar dos conjuntos en los que uno es parte propia (totalmente contenida) del otro.

El obstáculo epistemológico

Desde la perspectiva histórica, la situación es bastante parecida. Antes de la primera mitad del siglo XIX, los matemáticos solamente reconocían el infinito potencial. El desarrollo del cálculo en los siglos XVII y XVIII, está marcado por la búsqueda de algoritmos de **procesos** potencialmente infinitos en contextos geométricos y dinámicos; dichos algoritmos surgen como una extrapolación del álgebra de los procesos finitos. De hecho, el cálculo de áreas y de tangentes y las técnicas de las series infinitas constituyen la parte central de la aritmética de los procesos infinitos. Con la consolidación del cálculo, los procesos infinitos y toda la operatividad asociada a ellos adquieren un lugar incuestionable dentro de la matemática. No sucede lo mismo con el infinito actual.

Sin embargo, a mediados del siglo XIX con la publicación del libro *Las paradojas del infinito* (1851) de Bernard Bolzano (1781-1848), se produce un cambio significativo. La concepción de Bolzano del infinito no tiene antecedentes en la matemática y modifica toda una tradición milenaria. Por primera vez, el infinito actual es admitido en la matemática a título de concepto bien definido, asociado a los únicos objetos susceptibles de ser numerados o medidos: los conjuntos y las magnitudes.

Describiremos con cierto detalle algunos aspectos matemáticos de las *Paradojas del infinito*, dado que ahí están presentes, aunque de manera embrionaria, los conceptos centrales de la matematización del infinito.

Bolzano postula dos principios sobre los que debe edificarse el concepto de infinito:

> *a)* El infinito es atributo de conjuntos. Bolzano descarta la idea de que los conjuntos infinitos son indeterminables. Su determinabilidad descansa en dos ideas que jugarán más tarde un papel crucial en la axiomatización de la teoría de conjuntos: la extensión y la comprensión.
>
> *b)* El infinito admite distintos grados, los conjuntos infinitos no tienen, como muchas

veces se había argumentado, todos el mismo tamaño.

Una vez establecidos estos dos principios, Bolzano se plantea la tarea de comparar los conjuntos infinitos y ordenarlos según su talla. La comparación y el establecimiento de un "orden" entre conjuntos infinitos es el punto de partida para definir una aritmética del infinito, sin embargo, este proyecto entraña una de las principales paradojas identificadas por Bolzano:

> Cuando dos conjuntos son infinitos, pueden estar en una relación tal que es posible acoplar cada miembro del primer conjunto con algún miembro del segundo de tal manera que, por una parte, ningún elemento de los conjuntos quede sin acoplarse, y por otra parte, ninguno de ellos aparezca en dos o más acoplamientos...

pero, continúa Bolzano, estos mismos conjuntos pueden, al mismo tiempo presentar otro tipo de relación:

> ... uno de los dos conjuntos puede contener al otro como una parte de sí mismo,... [Bolzano (1851), párrafo 20, pp. 64-65]

Los conjuntos infinitos ofrecen la posibilidad de establecer una biyección entre dos de ellos cuando uno es subconjunto propio (completamente contenido) del otro. Esta característica, que hoy nos sirve para definir los conjuntos infinitos, tiene como consecuencia lógica la negación del axioma *El todo es siempre mayor que la parte*, ya que, a partir de la correspondencia uno-a-uno se puede establecer la igualdad del todo y la parte.[4] Ante esta disyuntiva, Bolzano niega que la biyección sea un buen criterio para determinar la numerosidad de los conjuntos infinitos, cuando está presente una relación del tipo parte-todo:

> ...(para asegurar que dos conjuntos infinitos son iguales) es insuficiente que se puedan aparear los términos de uno con los del otro... La conclusión no será posible a menos que los ***dos conjuntos tengan idénticos términos de especificación...*** si no cuidamos este punto, podemos llegar al absurdo en los cálculos que involucran al infinito. [*Ibídem*, párrafo 21, p. 67, negritas en el original]

A pesar de ello, Bolzano plantea algunas situaciones particulares, como el caso de los números naturales y sus cuadrados, más exactamente de los términos de las series

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots \text{ etc. } \quad y \quad S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots \text{ etc.}$$

de donde se deduce, "*a pesar de las apariencias de lo contrario*", la igualdad del conjunto de sus términos.

> En efecto, –continúa Bolzano–:... por el hecho de elevar, en S_2 cada término de la serie S_1 al cuadrado, cambiamos solamente las propiedades de sus términos, **no su multiplicidad** [*Ibídem* párrafo 33, p. 89, negritas en el original]

Respecto a la aritmética del infinito, Bolzano analiza la posibilidad de introducir una cierta operatividad, si bien esto resulta infructuoso ya que no posee un concepto para cuantificar los conjuntos, equivalente a lo que sería más tarde la *cardinalidad* [5] de Cantor. El problema de la aritmetización del infinito queda entonces sólo en términos de razones entre uno y otro infinito. Bolzano no avanza sobre la idea de numerosidad y define una aritmética del infinito basada en el criterio más intuitivo de la parte y el todo, veamos un ejemplo en extenso:

> No es menos evidente que el conjunto de las cantidades que se hallan entre dos dadas, digamos 7 y 8, depende sólo de la distancia 8 - 7 y por tanto será necesariamente igual a cualquier otro cuya distancia sea igual –**y esto a pesar de que es un conjunto infinito y, por tanto, imposible de determinar por medio de**

> **un número, no importa qué tan grande este sea**–. Bajo esta hipótesis y denotando el conjunto de todas las cantidades entre a y b por
>
> mult (b - a)
>
> debe haber ecuaciones no-numéricas de la forma
>
> mult (8 - 7)= mult (14 - 13)
>
> y también de la forma
>
> mult (b - a) : mult (d - c) = (b - a) : (d - c)
>
> contra cuya validez no hay objeciones fundadas... Lo anterior valida la posibilidad de calcular con el infinito [*Ibídem* párrafo 29, pp. 80-81, negritas mías]

Claramente Bolzano niega aquí (véase las negritas en la cita) la posibilidad de asignar un número determinado a un conjunto infinito –contrariamente a lo que propondría más tarde Cantor–, negándose con ello la posibilidad de desarrollar una extensión del campo de la aritmética al infinito actual, que contuviera a la aritmética finita como un caso particular. Para Bolzano es la relación parte-todo y no la biyección, la que permite hacer “operaciones” (sumamente limitadas) con los conjuntos infinitos.

Reuniendo las indicaciones sobre el orden y la igualdad de magnitudes que Bolzano define entre conjuntos infinitos, se obtienen las proposiciones siguientes:

> *a)* El todo es más grande que la parte.
>
> *b)* Todo conjunto infinito puede ser relacionado biyectivamente con uno de sus subconjuntos propios.
>
> Agreguemos a estos dos enunciados el siguiente:
>
> *c)* Dos conjuntos puestos en biyección pueden tener la misma multiplicidad (como Bolzano anticipa para conjuntos infinitos de enteros).

Esto hace estallar la contradicción que está ya latente en los dos primeros enunciados. La evidencia intuitiva del axioma (a), derivada de consideraciones sobre conjuntos finitos, impide a Bolzano, como a sus antecesores, establecer un criterio de equivalencia por medio de la biyección. Este conflicto profundo, presente en cada sección de las *Paradojas*, obstaculiza la construcción de una aritmética coherente del infinito.

Bolzano no deja de insistir en la relación paradójica entre dos conjuntos infinitos: a partir de la existencia de una biyección, el hecho de concluir la igualdad de dos conjuntos infinitos, desde el punto de vista de su multiplicidad (o, como decimos desde Cantor, su equipotencia o equivalencia) es extender de manera ilegítima una propiedad de los conjuntos finitos a los conjuntos infinitos. Bolzano no admite que las nociones de finito y de infinito entren en una definición de equivalencia fundada en la existencia de una biyección entre dos conjuntos cualesquiera, definición que había él mismo formulado. Estamos ante un obstáculo que surge de una concepción basada en la intuición y en una especie de evidencia empírica y que impide una reorganización del cuerpo teórico en una dirección más fecunda. Es un buen candidato para explorar un obstáculo didáctico que formularíamos de la siguiente manera:

> Las concepciones de los conjuntos finitos impiden fuertemente la aceptación del criterio de la biyección para establecer una comparación de conjuntos infinitos y entonces avanzar así hacia una aritmetización del infinito.

Los conjuntos infinitos y las concepciones de los estudiantes

La teoría de conjuntos formó parte, desde los años sesenta, de la enseñanza mundial de las matemáticas, a todos los niveles. Aunque estaba incluida en todos los programas escolares, sus beneficios nunca fueron enteramente aclarados. De hecho, el papel que la teoría de conjuntos juega en las matemáticas como un sintetizador del cuerpo teórico no es del todo evidente cuando se trata del conocimiento escolar.

Desde el punto de vista conceptual, es necesario separar las nociones de *pertenencia* y de *inclusión* de las de *cardinalidad* y de *infinito*. Sobre las primeras, se basaba la enseñanza elemental, pero es en las dos últimas que se concentra la fuerza de la teoría de conjuntos.

Las nociones de pertenencia y de inclusión existen en las matemáticas (y en el "sentido común") desde épocas tempranas [Cfr. Bourbaki (1969)]. Son nociones intuitivas que no suscitan controversias; la idea de pertenencia a una clase, como elemento o como subclase, es una de las operaciones lógicas elementales. A partir de estas nociones ha sido posible desarrollar una teoría de silogismos y de métodos axiomáticos (recordemos que "el todo es mayor que la parte" es una noción común en los *Elementos* de Euclides). Pero la idea de cardinalidad supone, además, la aceptación del infinito actual, lo que desde siempre, ha encontrado fuertes oposiciones.

Cuando el estudiante se enfrenta por primera vez a los conjuntos infinitos (hay que señalar que un conjunto infinito, de acuerdo con la definición de conjunto, sólo puede ser actualmente infinito) debe aceptar que *el todo puede ser igual a la parte*, lo que representa una verdadera contradicción. Las raíces del conflicto se deben buscar en el hecho de que los esquemas intelectuales están construidos a partir de experiencias empíricas. Estos esquemas son extendidos y, en cierta medida, adaptados a situaciones infinitas; extrapolación que conduce a contradicciones difícilmente superables.

En investigaciones previas se puso en evidencia la tensión que provoca en los estudiantes la comparación de conjuntos infinitos cuando existen, simultáneamente, relaciones de inclusión y de biyección. Este problema fue retomado para un estudio a profundidad, considerando la amplitud de sus efectos en la enseñanza del cálculo y en la comprensión general del infinito.

Ya han sido reportados los resultados de un estudio sobre el nivel de conceptualización de los conjuntos infinitos que tienen los estudiantes del primer semestre de universidad [Moreno, L. y Waldegg, G. (1991)], este estudio reveló algunas ideas comunes entre estos estudiantes. Por ejemplo, los estudiantes (en general) piensan que:

• El prototipo de los conjuntos infinitos es el conjunto de los números naturales.

• Si es posible la puesta en relación de los elementos de un conjunto (o de una parte de él) con los números naturales, entonces se puede afirmar que el conjunto es infinito.

• No se puede decidir si un conjunto es infinito por la sola existencia de relaciones de inclusión y de biyección (esto contrasta con nuestra definición actual de conjunto infinito como aquél que puede ponerse en correspondencia biyectiva con uno de sus subconjuntos propios).

• El establecimiento de la inclusión o de la biyección (o de las dos) entre dos conjuntos infinitos, no representa ningún conflicto. Los problemas surgen cuando estas relaciones deben ser confrontadas a fin de decidir sobre la igualdad o desigualdad de los conjuntos.

• No hay, aparentemente, ninguna ventaja al escoger el criterio de la biyección para comparar conjuntos infinitos. El criterio de la inclusión es más natural, más intuitivo. Dicho de otra manera, no hay ninguna experiencia didáctica elemental que muestre los beneficios del criterio de la biyección.

• Algunos estudiantes piensan que los conjuntos infinitos son todos "iguales"[6] (o bien que no lo son jamás). En este caso, No hay contradicción a propósito de la existencia simultánea de la inclusión y de la biyección.

Soporte estadístico de las observaciones

A partir de los resultados obtenidos en los estudios anteriores, realizamos una nueva investigación con el propósito de medir la coherencia de las respuestas de los estudiantes ante situaciones vinculadas a los conjuntos infinitos. La idea era partir de las propias concepciones del estudiante y enfrentarlo, en situaciones diversas, a las consecuencias lógicas de dichas concepciones. Para ello, se diseñó un cuestionario de acuerdo con las consideraciones técnicas siguientes:

• Una parte del cuestionario estaba dedicada a la instrucción, y contenía definiciones y ejemplos. Esta parte fue concebida **siguiendo las ideas de los alumnos, aunque matemáticamente no fueran exactas**. Por ejemplo, dimos la definición: *"Un conjunto es infinito si se debe utilizar todos los enteros naturales para contar sus elementos o una parte de ellos".*

• Las preguntas estaban agrupadas de acuerdo con distintos contextos, situaciones particulares y situaciones generales. El cuestionario estaba estructurado en 14 bloques (34 preguntas en total). Cada bloque presentaba una situación determinada y planteaba varias preguntas al respecto. Todas las preguntas presentaban opciones "*sí*", "*no*" y "*no se puede decir*" y había respuestas correctas de los tres tipos.

El cuestionario fue aplicado a una muestra de 95 estudiantes de bachillerato del área físico-matemática (entre 15 y 18 años), de niveles socioeconómicos semejantes. La tabla 1 describe el contenido del cuestionario así como una primera aproximación de los resultados en términos de porcentajes.A partir de esta tabla se pueden apreciar los hechos siguientes:

• Habíamos supuesto que, para los alumnos, poder "contar" los elementos de un conjunto (utilizando la serie completa de los números naturales) era una condición necesaria para afirmar que el conjunto es infinito. Sin embargo, esta condición no fue suficiente. Las respuestas de los estudiantes nos hacen ver que hace falta además, que los conjuntos posean una "estructura de fila" a fin de que se pueda disponer de un espacio ilimitado para "colocar" los elementos del conjunto. Así, no es difícil afirmar que un conjunto con un orden lineal es infinito, ya que esta configuración puede prolongarse indefinidamente. Las preguntas relacionadas con conjuntos así caracterizados (los números naturales, los pares, los enteros, las potencias de diez o la recta), obtuvieron los porcentajes de acierto más altos. Por el contrario, los porcentajes de acierto para los conjuntos acotados (por ejemplo, los puntos de un segmento) cayeron de una manera notable.

Tabla 1

Bloque	**Conjuntos (puntos o números)**	**Dificultad**	**Preguntas**	**Aciertos %**
I	Puntos de un segmento	Continuo/acotado	1. ¿Es infinito?	64
II	Naturales y pares	Estructura "de fila"	2. ¿Hay una biyección? 3. ¿Cuál biyección? 4. ¿Son "iguales"?	48 39 32
III	Naturales y enteros pares	No hay 1er elemento	5. ¿Son infinitos? 6. ¿Hay una biyección? 7. ¿Cuál biyección? 8. ¿Son "iguales"?	33 95 4 32
IV				
V	Naturales y potencias de diez	Estructura "de fila"	13. ¿Hay una biyección? 14. ¿Cuál biyección? 15. ¿Son "iguales"?	96 56 30
VI	Naturales y naturales sin el cero	Un solo elemento "de más"	16. ¿Son "iguales"?	47
VII	A y B abstractos	A subconjunto propio de B	17. ¿Finitos e "iguales"? 18. ¿Infinitos e "iguales"?	72 41
VIII	D y C abstractos	D subconjunto infinito de C	19. ¿C-D puede ser finito?	19
IX	Puntos sobre dos segmentos	Continuo/acotado	20. ¿AB es infinito? 21. ¿CD es infinito? 22. ¿Hay una biyección? 23. ¿Son "iguales"?	47 45 65 43
X	Cuadrado y semi-recta	Continuo, acotado/no-	24. ¿Puntos del cuadrado infinitos?	58

		acotado Dimensiones diferentes	25. ¿Puntos de la recta infinitos? 26. ¿Son “iguales”?	84 11
XI	Recta y semi-circunferencia	Continuo, acotado/no-acotado	27. ¿Hay una biyección? 28. ¿Son “iguales”? 29. Igualdad semi-circunferencia/segmento 30. Igualdad segmento /recta	72 23 27 13
XII	(0,1) y (0,2)	Continuo/acotado	31. ¿Hay una biyección? 32. ¿Son “iguales”?	69 47
XIII	Círculo y círculo más circunf.	continuo/acotado	33. ¿Son “iguales”?	32
XIV	Superficie y recta	continuo, acotado/no-acotado	34. ¿Son “iguales”?	56

• Las preguntas sobre la posibilidad de establecer una correspondencia uno-a-uno entre los conjuntos en cuestión varían en un margen considerable de aciertos (entre 33% y 72%). Los porcentajes son más importantes si la biyección está sugerida o explicitada en la pregunta.

• Los porcentajes de acierto a propósito de la equipotencia son los más bajos (entre 11 y 56%) salvo para la pregunta teórica 34, el resto es inferior a 50%. De hecho, el promedio de aciertos de estas preguntas no sobrepasa 32%. Dicho de otro modo, menos de un tercio de los estudiantes aceptan la equipotencia (“igualdad”) de los conjuntos comparados.

Dadas las características de los datos obtenidos a partir del cuestionario, elegimos para estudiarlos el método del análisis factorial de correspondencias, a fin de determinar las posibles relaciones entre las variables implicadas. Este método se emplea para obtener una representación geométrica de un conjunto de datos, que permita apreciar los agrupamientos de los elementos del conjunto [véase, por ejemplo, Benzecri (1980)].

Las preguntas del cuestionario se concentraban en dos asuntos centrales: *a)* decidir si un conjunto es infinito y *b)* decidir si dos conjuntos son equipotentes. En un primer momento sólo se tomaron en cuenta las preguntas relacionadas con estos dos puntos, considerándolas variables principales. Las preguntas de un solo bloque que trataban sobre el establecimiento de la biyección y la aceptación del criterio de comparación, fueron agrupadas como una sola variable cuya respuesta fue considerada correcta cuando las dos preguntas se contestaban correctamente.

El primer hecho importante que surge en el análisis estadístico es la dispersión de la “nube de datos”. Esta dispersión se suele interpretar como ausencia de aprendizaje, lo que significa que la información contenida en el cuestionario no tuvo los efectos esperados sobre la muestra. Así, los tratamientos de las diferentes situaciones vinculadas al infinito, sólo obedecen a nociones intuitivas que conforman las estructuras cognitivas de cada estudiante.

A pesar del punto anterior, los reagrupamientos de las preguntas alrededor de los ejes principales de la nube concuerdan con las características matemáticas comunes de dichas preguntas. Así, situaciones matemáticamente parecidas se reencuentran en la configuración de los datos, lo que indica que los estudiantes les dieron un tratamiento similar.

Dada la dispersión de la nube de datos, definimos de nuevo las variables principales a fin de encontrar otras relaciones. Realizamos dos análisis suplementarios diferentes, que mostraron los resultados siguientes:

• Hay grupos bien diferenciados de preguntas relacionadas entre sí. Estas preguntas poseen características matemáticas comunes y son entonces tratadas de la misma manera por los estudiantes. Los grupos de preguntas son estables en los diferentes análisis.

• Hay estudiantes reunidos, en tanto que variables, alrededor de ciertas preguntas, que se dispersan frente a otras, esto quiere decir que los estudiantes no comparten las mismas intuiciones locales del infinito.

• La dispersión de la nube no desaparece con la modificación del análisis, lo que indica que, efectivamente, se trata de una ausencia de aprendizaje.

El obstáculo didáctico

A partir del estudio estadístico, podemos decir que hay factores que tienen una fuerte influencia sobre la comprensión de los conjuntos infinitos:

• Un conjunto acotado, sobre todo si está encuadrado en un contexto geométrico, difícilmente se acepta que tiene un número infinito de elementos. De hecho, como en el caso histórico de Bolzano, la configuración y las dimensiones de las regiones geométricas son un obstáculo para la concepción de los conjuntos de puntos contenidos en ellas.

• La comparación entre dos conjuntos infinitos se hace más difícil si un conjunto es acotado y el otro no. En este caso, el infinito potencial es un obstáculo para comparar los dos conjuntos. El infinito potencial se hace evidente en el conjunto no-acotado que permite disponer de las posiciones necesarias para continuar un proceso. Al contrario, este infinito permanece oculto en el conjunto acotado, produciendo con ello una parálisis ante el problema.

• Existe un rechazo a usar el criterio de la biyección para comparar un conjunto con uno de sus subconjuntos propios, aun en el caso de que haya una instrucción al respecto.

En cuanto al comportamiento de los estudiantes podemos concluir que:

• El estudiante posee una serie de intuiciones locales al respecto del infinito que aplica según la situación. Las intuiciones son localmente coherentes pero globalmente, se contradicen.

• Las nociones intuitivas son un obstáculo para aceptar los conceptos formales, aunque no todos los estudiantes comparten las mismas intuiciones locales. Algunos responden muy parecido ante una situación propuesta, pero, cambiando la situación, no reaccionan de manera similar.

Los hallazgos de nuestro estudio confirman algunos resultados teóricos ya establecidos. En primer lugar, se tiene sin duda el obstáculo del desdoblamiento de los objetos matemáticos discutido por Duval. De acuerdo con este autor el obstáculo del desdoblamiento aparece cuando el estudiante debe

> ...separar propiedades o características, hasta entonces fuertemente asociadas a un objeto, o atribuir denominaciones y representaciones diferentes a un objeto que se piensa que es el mismo [Duval (1983), p. 410]

En nuestro caso, cada elemento de un conjunto juega un doble papel: pertenece simultáneamente a dos conjuntos cuyas características han sido establecidas con anterioridad. Así, una potencia de diez posee propiedades porque pertenece al conjunto de enteros y, al mismo tiempo, porque pertenece al conjunto de potencias de diez. 10^n debe ser desdoblado y considerado como dos objetos diferentes a fin de establecer la biyección entre los enteros y las potencias de diez.

Por otra parte, encontramos la estabilidad del pensamiento intuitivo señalada por Pozo y Carretero (1987). Este tipo de pensamiento, cuya coherencia sólo es local, presenta características de resistencia a los cambios y a nuevas articulaciones generadas con nuevos conocimientos. La causa principal de esta estabilidad reside en el hecho de que la coherencia local permite a los estudiantes desempeñarse convenientemente en numerosas situaciones que no tienen aparentemente ninguna relación. Así, las propiedades y las operaciones relacionadas con los conjuntos finitos que se extienden a los conjuntos infinitos, permiten dar respuestas locales correctas desde el punto de vista del sentido común. Mientras que otro acercamiento, como el que propone el análisis matemático, no ofrece más que resultados “absurdos”.

Ahora bien, el obstáculo del desdoblamiento y el de la estabilidad del pensamiento intuitivo deben ser referidos a los contextos matemáticos en los que se sitúan. Tomemos, por ejemplo, la observación que hicimos a propósito de los conjuntos que poseen una estructura “de fila” frente a los conjuntos acotados.

En el primer caso, hay una correspondencia **directa** entre la serie temporal ordenada de eventos (contar los naturales, los pares, las potencias de diez) y su proyección espacial lineal. Esta correspondencia refleja un orden dentro de otro orden, es decir, respeta la estructura de orden. El pensamiento intuitivo, resultado de la construcción de tal correspondencia en el niño, no contraviene las exigencias de la teoría matemática y puede evolucionar hacia nociones formales. Por el contrario, el obstáculo del desdoblamiento se revela difícil de superar porque es necesario asociar dos órdenes diferentes a un mismo elemento (el orden “natural” y el orden debido a su pertenencia a otro conjunto). En el caso de los conjuntos acotados, hay que establecer una correspondencia **inversa** entre la serie temporal de eventos (contar los puntos, por ejemplo) y su proyección espaciales no necesariamente lineal. De esta manera, los valores de los números aumentan temporalmente en la serie numérica y la representación espacial corresponde a puntos cada vez más cercanos. El desdoblamiento no parece jugar un rol decisivo en este caso, mientras que las intuiciones locales, constituyen el obstáculo más importante.

Pero cualesquiera que sean las explicaciones locales a las dificultades de los estudiantes, podemos englobarlas dentro de un marco explicativo general, que las relacione con los obstáculos epistemológicos identificados por medio de un análisis histórico y complementado con un análisis lógico-matemático. En el caso del infinito, la identificación de las dificultades que tuvieron que ser superadas en el desarrollo histórico, nos dio los elementos para plantear su búsqueda en las concepciones de los estudiantes y, a partir de ello, proponer “caminos didácticos” para vencerlas. La resistencia que presentan estas concepciones ante distintos intentos instruccionales muestra que estamos ante un obstáculo didáctico con raíces epistemológicas. Evidentemente, no se puede concluir de ahí que con la sola “maduración” el estudiante alcanzará un nivel de conceptualización conforme al cuerpo teórico de la matemática. Es necesaria la intervención de procesos didácticos bien planificados, que tengan en cuenta los obstáculos que el estudiante tiene que vencer.

Notas

1 Teóricamente siempre es posible aproximarse a una cantidad dada, “tanto como se quiera”, el proceso de aproximación es un proceso potencialmente infinito. Desde el punto de vista práctico, debido a las limitaciones de los sentidos, de los aparatos de medir y de las necesidades cotidianas, la aproximación es siempre restringida.

2 La variación continua entraña la idea de infinito ya que supone que entre dos estados cualesquiera de la variable, siempre hay una infinidad de estados intermedios.

3 Por ejemplo, si podemos localizar, por biparticiones, una infinidad (potencial) de puntos sobre un segmento, es porque en el segmento **hay** una infinidad (actual) de tales puntos. Esta tesis es sostenida por algunos matemáticos e historiadores como A. Koyré [1961] y R. Thom [1992].

4 Piénsese, por ejemplo, en el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números pares, claramente subconjunto propio del primero. A cada número natural se le puede asociar un par (su doble) y a cada numero par le corresponde un natural (su mitad), lo que implica que hay tantos números pares como naturales, a pesar de que los pares sólo son una parte de los naturales.

5 Algo así como el “número de elementos” del conjunto.

6 Siempre que hablamos de conjuntos “iguales” nos referimos a la cardinalidad, técnicamente diremos que los conjuntos son “equipotentes”.

Bibliografía

Benzecri, J.P. (1980). *Pratique de l’analyse de données*, París: Dunod.

Bolzano, Bernard (1851). *Paradoxien Des Unendlichen*, Leipzig (publicación póstuma). *Las paradojas del infinito* (trad. L.F. Segura),1991, México: Mathema.

Bourbaki, Nicolas (1969). Éléments d’histoire des mathématiques. *Elementos de la historia de las matemáticas* (trad. J. Hernández), 1976, Madrid: Alianza Universidad.

Duval, Raymond (1983). “L’obstacle du dédoublement des objets mathématiques”, *Educational Studies in Mathematics*, 14, 358-414.

Fischbein, E., Tirosh, D., Hess, P. (1979). “The Intuition of Infinity”, *Educational Studies in Mathematics*, 10, 3-40.

Koyré, Alexandre (1961). “Remarques sur les paradoxes de Zénon” en *Études d’histoire de la pensée philosophique*, pp. 9-35, París: Gallimard.

Moreno, L., Waldegg, G. (1991). “The Conceptual Evolution of Actual Mathematical Infinity”, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 211-231.

Pozo, J. I., Carretero, M. (1987). “Del pensamiento formal a las concepciones espontáneas: ¿Qué cambia en la enseñanza de la ciencia?”, *Infancia y Aprendizaje*, 38, 50.

Thom, René (1992). “L’antériorité ontologique du continu sur le discrète” en J-M. Salanskis et H. Sinaceur, *Le labyrinthe du continu*, pp. 137-143, París: Springer-Verlag.